

# Matemáticas Aplicadas a la Física

**Oswaldo González-Gaxiola**

Matemáticas Aplicadas y Sistemas UAM-Cuajimalpa

## Introducción

Debido a la poca comunicación entre matemáticos y físicos que ocurre desde los estudios de licenciatura, algunas de las más interesantes y profundas relaciones entre matemáticas y física son accesibles sólo para los pocos investigadores que estudian matemáticas y física a nivel avanzado. Este es el caso del estudio del oscilador armónico cuántico, un objeto de estudio fundamental de la física-matemática que combina conceptos de física y matemáticas, aparentemente sin relación alguna, además se hace un estudio a nivel introductorio a las simetrías en la mecánica cuántica teniendo como fin tratar un caso: el átomo de hidrógeno y su degeneración accidental.

En el presente taller estudiaremos en la primera sesión algunos conceptos básicos de matemáticas que en las siguientes sesiones se usaran para el estudio de temas básicos de física cuántica. En la segunda sesión estudiaremos a manera de repaso las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) necesarias en el estudio del Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico y las supersimetrías; además se da una breve introducción a la mecánica cuántica. En la sesión número tres estableceremos las supersimetrías en el oscilador armónico cuántico generalizado en la recta, las ecuaciones de Bernoulli y Ricatti involucradas en el cálculo de Hamiltonianos acompañantes supersimétricos. En la cuarta y última sesión se usará la factorización supersimétrica de la parte radial de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, lo cual proporciona operadores de creación y aniquilación (o también de ascenso y descenso) útiles para obtener las funciones propias y relaciones entre ellas para la parte radial, además vamos a caracterizar la degeneración accidental en el átomo de hidrógeno debida a la existencia del vector constante de movimiento de Runge-Lenz. Cada sesión está escrita a manera de capítulo en el presente trabajo.

# Capítulo 1

## Matemáticas para la Física

**Objetivos de Estudio del Capítulo:** Espacios vectoriales, espacios normados y con producto interior, operadores entre espacios vectoriales, dos espacios de relevancia en la física de partículas;  $L^2(\mathbb{R})$  y  $l^2(\mathbb{N})$ .

En todo nuestro estudio usaremos la misma notación:  $\mathbb{R}$  para el conjunto de los números reales,  $\mathbb{N}$  para el conjunto de los números naturales y  $\mathbb{C}$  para el conjunto de los números complejos. Además se utilizarán letras  $X, Y, Z, M, \dots$ , para conjuntos, mientras  $x, y, z, m, \dots$ , para elementos de un conjunto dado y a través de la discusión relacionada con espacios vectoriales, el campo algebraico será  $\mathbb{F}$ , el cual algunas veces será  $\mathbb{R}$  y en otras  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.** *Un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$  (los números reales o los números complejos) es un conjunto  $V$  no vacío, dotado de dos aplicaciones:*

$$\begin{aligned} \text{Suma } + : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

*operación interna tal que:*

1) *tenga la propiedad conmutativa, es decir*

$$u + v = v + u, \forall u, v \in V$$

2) *tenga la propiedad asociativa, es decir*

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$$

3) *tenga elemento neutro  $0$ , es decir*

$$\exists 0 \in V : u + 0 = u, \forall u \in V$$

4) *tenga elemento inverso, es decir*

$$\forall u \in V, \exists -u \in V : u + (-u) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Producto } \cdot : K \times V &\longrightarrow V \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

operación externa tal que:

$$a) a(bu) = (ab)u, \forall a, b \in K, \forall u \in V$$

$$b) \exists 1 \in K, 1u = u, \forall u \in V$$

$$c) a(u + v) = au + av, \forall a \in K, \forall u, v \in V$$

$$d) (a + b)u = au + bu, \forall a, b \in K, \forall u \in V$$

Los elementos de  $\mathbb{F}$  se llaman escalares.

Los elementos de  $V$  se llaman vectores.

Si supiésemos que  $V$  es un grupo conmutativo o abeliano respecto la suma ya tendríamos resuelto 1,2,3 y 4.

**Definición 2.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  y  $U \subset V$  no vacío,  $U$  es un subespacio vectorial de  $V$  si:

$$(a) \forall u, v \in U, u + v \in U$$

$$(b) \forall u \in U, \forall k \in \mathbb{F}, ku \in U.$$

$U$  hereda las operaciones de  $V$  como aplicaciones bien definidas, es decir, que no escapan de  $U$ , y como consecuencia tenemos que  $U$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ .

### Ejemplo 1

Queremos ver que  $V = \mathbb{R}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ :

Los elementos de  $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  son, de forma genérica, parejas  $(x, y)$  de números reales.

Definimos la operación  $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$  que pertenece a  $V$ , esto implica que la suma de vectores es interna y bien definida.

$$1) u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = v + u, \text{ es decir } u + v = v + u$$

$$2) u + (v + w) = u + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = u + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2 + x_3), (y_2 + y_3)) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3),$$

ahora véase que  $(u + v) + w$  es lo mismo, es decir,  $u + (v + w) = (u + v) + w$ .

$$3) u + (0, 0) = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = u, \text{ es decir, } (0, 0) = 0 \text{ cero de } V.$$

$$4) u = (x, y), u + (-x, -y) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0,$$

es decir,  $-u := (-x, -y)$  en general.

Definimos la operación  $au = a(x, y) := (ax, ay) = (x_2, y_2)$  que pertenece a  $V$ , esto implica que la multiplicación de escalar por vector es interna y bien definida.

a)  $a(bu) = a(b(x, y)) = a(bx, by) = (a(bx), a(by)) = ((ab)x, (ab)y) = (ab)(x, y) = (ab)u$ , es decir,  $a(bu) = (ab)u$ .

b)  $1u = 1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y) = u$ , es decir,  $1u = u$ .

c)  $a(u+v) = a((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = a(x_1+x_2, y_1+y_2) = (a(x_1+x_2), a(y_1+y_2)) = (ax_1+ax_2, ay_1+ay_2) = (ax_1, ay_1) + (ax_2, ay_2) = au + av$ , es decir,  $a(u+v) = au + av$ .

d)  $(a+b)u = (a+b)(x, y) = ((a+b)x, (a+b)y) = (ax+bx, ay+by) = (ax, ay) + (bx, by) = au + bu$ , es decir,  $(a+b)u = au + bu$ .

Queda demostrado que es espacio vectorial.

### Ejemplo 2

Espacios de funciones:

- $\mathcal{F}(V; \mathbb{R}) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es función}\}$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , con  $V$  cualquier conjunto.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es función}\}$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- $C(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ es continua}\}$  subespacio vectorial de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .
- $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ es diferenciable}\}$  subespacio vectorial de  $C(\mathbb{R})$ .
- $\mathbb{R}[x] = \{p(x) : \text{polinomios de variable real}\}$  subespacio vectorial de  $C^1(\mathbb{R})$ .

### Ejemplo 3

Espacios de matrices:

- $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

### Base y Dimensión

Las bases revelan la estructura de los espacios vectoriales de una manera concisa. Una base es el menor conjunto (finito o infinito)  $B = \{v_i\}_{i \in I}$  de vectores

que generan todo el espacio. Esto significa que cualquier vector  $v$  puede ser expresado como una suma (llamada combinación lineal) de elementos de la base, es decir,

$$a_1v_{i_1} + a_2v_{i_2} + \dots + a_nv_{i_n},$$

donde los  $a_k$  son escalares y  $v_{i_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) elementos de la base  $B$ . La minimalidad, por otro lado, se hace formal por el concepto de independencia lineal. Un conjunto de vectores se dice que es linealmente independiente si ninguno de sus elementos puede ser expresado como una combinación lineal de los restantes. Equivalentemente, una ecuación

$$a_1v_{i_1} + a_2v_{i_2} + \dots + a_nv_{i_n} = 0$$

sólo se consigue si todos los escalares  $a_1, \dots, a_n$  son iguales a cero. Por definición cada vector puede ser expresado como una suma finita de los elementos de la base. Debido a la independencia lineal este tipo de representación es única. Los espacios vectoriales a veces se introducen desde este punto de vista.

Todo espacio vectorial tiene una base. Este hecho se basa en el lema de Zorn, una formulación equivalente del axioma de elección. Habida cuenta de los otros axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, la existencia de bases es equivalente al axioma de elección. Se puede probar que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo "tamaño", es decir, cardinalidad. A ésta, se le llama la dimensión del espacio vectorial, representada por  $\dim V$ . Si el espacio es generado por un número finito de vectores, todo lo anterior puede demostrarse sin necesidad de acudir a la teoría de conjuntos. La dimensión de un espacio de coordenadas  $F^n$  es  $n$ , pues cualquier vector  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  puede expresarse de forma única como combinación lineal de  $n$  vectores (llamados vectores coordenadas)  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , a  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ , es decir, la suma

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n,$$

La dimensión de los espacios de funciones, como por ejemplo el espacio de funciones definidas en algún intervalo acotado o no, es infinita.

### Transformaciones Lineales

Como ocurre con muchas entidades algebraicas, la relación entre dos espacios vectoriales se expresa por las aplicaciones (funciones) entre ellos. En el

contexto de los espacios vectoriales, el concepto correspondiente se denomina transformación lineal. Se trata de funciones  $T : V \rightarrow W$  que son compatibles con la estructura relevante, *i.e.*, preservan la suma de vectores y el producto por un escalar:

$$T(v + w) = T(v) + T(w),$$

$$T(av) = aT(v).$$

Un isomorfismo es aquella aplicación lineal  $T : V \rightarrow W$  para la cual existe una inversa  $G : W \rightarrow V$ . Si existe un isomorfismo entre  $V$  y  $W$ , los dos espacios se dice que son isomorfos, siendo esencialmente idénticos como espacios vectoriales, ya que a cualquier vector en  $V$  le corresponde, a través de  $T$ , otro similar en  $W$ , y viceversa a través de  $G$ .

Dados dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  forman un espacio vectorial representado como  $Hom(V, W)$  o como  $L(V, W)$ .

Una vez se elige una base de  $V$ , las transformaciones lineales  $T : V \rightarrow W$  están completamente determinadas por las imágenes de los vectores de la base, ya que cualquier elemento de  $V$  se expresa de forma única como una combinación lineal de éstos. Si los dos espacios tienen la misma dimensión se puede elegir una biyección entre dos bases fijas de  $V$  y  $W$ . La aplicación que aplica cualquier elemento de la base de  $V$  en el correspondiente elemento de la base de  $W$ , es, por su propia definición, un isomorfismo. Luego todo espacio vectorial está completamente determinado (salvo isomorfismos) por su dimensión, un simple número. En particular, cualquier espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{F}$  es isomorfo a  $\mathbb{F}^n$ .

## Espacio Vectorial Normado, Espacio de Banach

Un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{F}$  en el que se define un valor absoluto (generalmente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) se dice que es normado si en él se puede definir una norma, es decir, una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , que verifica:

1. **No negatividad.** Para todo  $\vec{x}$  de  $V$  su norma ha de ser positiva, y será cero si y sólo si  $\vec{x}$  es el vector cero:  $0 < \|\vec{x}\|$  si  $\vec{x} \neq \vec{0}$  y  $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ .

2. **Homogeneidad.** Para todo  $\vec{x}$  de  $V$  y para todo  $k$  de  $\mathbb{F}$  se satisface que  $\|k\vec{x}\| = |k|\|\vec{x}\|$  donde  $|\cdot|$  es el módulo o valor absoluto.

**3. Desigualdad triangular.** Para todos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  de  $V$  se cumple que

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Generalmente se denotará  $(V, \|\cdot\|)$  al espacio vectorial normado y cuando la norma sea clara simplemente por  $V$ .

- Todas las normas definidas en el espacio son equivalentes, es decir, definen la misma topología. La convergencia o divergencia de una sucesión no depende de la norma escogida. El resultado no es cierto para espacios de dimensión infinita siendo siempre posible encontrar dos normas que no son equivalentes.
- El espacio es completo, es decir, es un **espacio de Banach**. Como consecuencia, todo subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) es cerrado.

### Espacio Vectorial con Producto Interior, Espacio de Hilbert

El producto interior o producto escalar de dos vectores en un espacio vectorial es una forma bilineal, hermítica y definida positiva, por lo que se puede considerar una forma cuadrática definida positiva.

Un producto escalar se puede expresar como una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  donde  $V$  es un espacio vectorial y  $\mathbb{F}$  es el campo sobre el que está definido  $V$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. **Linealidad por la izquierda y por la derecha:**

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle \text{ y análogamente } \langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

2. **Hermiticidad:**

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

3. **Definida positiva:**

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \text{ si y sólo si } x = 0,$$

donde  $x, y, z \in V$  son vectores,  $a, b \in \mathbb{F}$  representan escalares y  $\bar{c}$  es el conjugado del complejo  $c$ .

Si el campo tiene parte imaginaria nula ( $\mathbb{R}$ ), la propiedad de ser sesquilineal se convierte en ser bilineal y el ser hermítica se convierte en ser simétrica.

También suele representarse por  $(\cdot|\cdot)$  o por  $\cdot$ .

Un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  dotado de un producto escalar se denomina espacio pre-Hilbert o espacio pre-Hilbertiano. Si además es completo, se dice que es un **espacio de Hilbert**, y si la dimensión es finita, se dirá que es un espacio euclídeo.

Un ejemplo importante es en el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el intervalo acotado por  $[a, b]$ , es decir, sobre  $C[a, b]$  se puede definir el producto interior:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (1.1)$$

Todo producto escalar induce una norma sobre el espacio en el que está definido, de la siguiente manera:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Y se cumple:

$$\langle x, y \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** para  $x, y$  elementos en  $V$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

la igualdad se cumple si y sólo si  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes.

Esta es una de las ms importantes desigualdades en la matemática. También es conocida en la literatura matemática rusa como la desigualdad Cauchy-Bunyakowski-Schwarz.

**Ley del paralelogramo:**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**Teorema de Pitágoras:** Sean  $x, y$  vectores ortogonales, entonces

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

**Operadores Adjuntos**

Existe una conexión importante entre un espacio de Hilbert y su espacio dual: si el campo base son los números reales, los dos son isométricamente isomorfos; si el campo base son los números complejos, los dos son isométricamente anti-isomorfos. El teorema de **representación de Riesz** es la justificación para la notación bra-ket usual en el tratamiento matemático de la mecánica cuántica.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y  $H'$  su espacio dual, consistente en todas las funciones lineales continuas de  $H$  en el campo base  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Si  $x$  es un elemento de  $H$ , entonces el  $\phi(x)$  definido por

$$\phi_x(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$$

es un elemento de  $H'$ .

En matemáticas, para todo operador lineal sobre un espacio de Hilbert puede definirse su operador adjunto. Éste es una generalización del concepto de matriz adjunta al caso de espacios de dimensión infinita.

**Definición 3.** *Dados un vector  $x \in H$  del espacio, y un operador lineal  $A : D \subset H \rightarrow H$  podemos definir el siguiente funcional lineal:*

$$\varphi(\cdot) = \langle x, A(\cdot) \rangle : D \rightarrow H ; \varphi(y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall y \in D$$

*En el caso de que este funcional sea continuo, se dice que  $A^*$ , el operador adjunto de  $A$ , está definido sobre  $x$ , y su valor viene dado por  $A^*x = z$ , donde  $z$  es el único vector que cumple*

$$\langle z, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall y \in D$$

*esto se tiene en virtud del teorema de representación de Riesz.*

## Dos Espacios Importantes

(I) En análisis matemático, una función  $f$  de una variable real con valores reales o complejos se dice cuadrado sumable o también cuadrado integrable sobre un determinado intervalo, si la integral del cuadrado de su módulo, definida en el intervalo de definición, converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Este concepto se extiende a las funciones definidas sobre un espacio de medida que tiene valores en un espacio vectorial de dimensión finita.

El conjunto de todas las funciones medibles cuadrado integrable sobre un dominio dado forman un espacio de Hilbert sumable, también llamado espacio  $L^2$ .

La condición cuadrado integrable es particularmente útil en mecánica cuántica ya que constituye la base para las funciones que describen el comportamiento de los sistemas físicos, consecuencia de la interpretación probabilística de la mecánica cuántica. Por ejemplo, para determinar el comportamiento en el espacio de una partícula (sin espín) se utiliza la función de onda  $\phi(x, y, z)$  para la cual debe existir y tener un valor finito una integral de la forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\phi(x, y, z)|^2.$$

Esta noción se generaliza a las funciones  $p$ -medibles para un número  $p$  real positivo, siendo las de cuadrado sumable las que corresponden con el caso particular  $p = 2$ .

(II) Sea  $B$  un conjunto, definimos  $l^2(B)$ , de la forma:

$$l^2(B) = \left\{ x : B \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{b \in B} |x(b)|^2 < \infty \right\}$$

Este espacio se convierte en un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle x, y \rangle = \sum_{b \in B} \overline{x(b)} y(b)$$

para todo  $x$  e  $y$  en  $l^2(B)$ .

$B$  no tiene por que ser un conjunto contable en esta definición, aunque si  $B$  no es contable, el espacio de Hilbert que resulta no es separable.

Expresado de manera más concreta, cada espacio de Hilbert es isomorfo a uno de la forma  $l^2(B)$  para un conjunto adecuado  $B$ . Si  $B = \mathbb{N}$ , se escribe simplemente  $l^2$ .



# Capítulo 2

## Ecuaciones Diferenciales Importantes en la Física-Matemática

**Objetivos de Estudio del Capítulo:** Repaso breve de las EDO necesarias en el estudio del Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico y las supersimetrías; además se da una breve introducción a la mecánica cuántica.

### 2.1. Ecuaciones Diferenciales (Repaso)

#### Ecuaciones Lineales y No lineales

Si  $F$  es una función, una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

La ecuación diferencial lineal más general, de orden  $n$  está dada por:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t).$$

Donde los coeficientes  $a_i$  representan funciones dependientes de  $t$ .

Una solución de la ecuación diferencial será una "familia" de curvas o funciones del tipo  $y = f(t)$ , que substituida en la ecuación la convierte en una igualdad en la que todos los términos son conocidos.

Un problema de valor inicial es un ecuación diferencial con alguna condición *al tiempo*  $t = x_0$ , es decir,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

o en su forma implícita:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ con } y(x_0) = y_0$$

### **Ecuaciones de Variables Separable**

Si mediante operaciones algebraicas es posible expresar la ecuación diferencial en la siguiente forma:

$$M(x)dx = N(y)dy$$

se dirá que es una ecuación diferencial de variables separables. De este modo, en cada miembro de la ecuación se tendrá solamente una variable. Para resolver este tipo de ecuaciones basta con integrar en cada miembro:

$$\int_{x_0}^x M(x)dx = \int_{y_0}^y N(y)dy$$

### **Ecuación diferencial lineal de primer orden**

Una ecuación diferencial es lineal ( $n = 1$ ) si presenta la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x);$$

y que tienen por solución:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left( C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}$$

Como se puede apreciar, esta ecuación es una ecuación diferencial de Bernoulli, con  $n = 0$ .

### **Ecuación de Bernoulli**

Una ecuación diferencial de Bernoulli, que es a su vez una generalización de la ecuación diferencial lineal (al caso no lineal), fue formulada por Jakob Bernoulli y resuelta por su hermano, Johann Bernoulli y es de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Donde  $P$  y  $Q$  son funciones continuas cualesquiera. En la cual, si se hace la sustitución  $z = y^{1-n}$ , la ecuación se transforma en una ecuación lineal con  $z$  como variable dependiente, resolviéndose de manera análoga y cuya solución para  $n > 1$  es dada por:

$$y(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{\sqrt[n-1]{(1-n) \int Q(x) dx + C}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

### Ecuación de Riccati

Una ecuación diferencial tiene la forma de la introducida por Jacobo Francesco Riccati cuando presenta la forma:

$$y'(x) + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0.$$

Para resolverla, se debe hacer la sustitución  $y = y_p + \frac{1}{z}$ , donde  $y_p$  es una solución particular cualquiera de la ecuación.

## 2.2. Brevísima Introducción a la Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica es un modelo matemático del mundo físico. Para describirlo introduciremos los conceptos de estado, observable, valor esperado y la ley dinámica.

**Estados.** Un estado es una descripción completa de un sistema físico. En mecánica cuántica un estado es un rayo en un espacio de Hilbert complejo. Recuérdese que un espacio de Hilbert complejo es un espacio vectorial sobre los complejos, que tiene un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que es definido positivo y sesquilineal, es decir, es lineal en una coordenada y lineal conjugado en la otra, y el espacio es completo en la norma  $\| \cdot \|$  inducida por el producto interno.

Un rayo en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$  es una clase de equivalencia de vectores  $u \in \mathcal{H}$  bajo la relación de equivalencia:  $u \sim v$  si y sólo si  $u = zv$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Podemos tomar como representante de cada clase a un vector unitario  $u$ , ( $\|u\| = 1$ ). Pero nótese que el vector  $e^{i\theta}u$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , también representa al mismo rayo.

**Observables.** Una observable es una propiedad del sistema físico que se puede medir, como la energía, la posición o el momento. En mecánica cuántica

las observables se representan por operadores autoadjuntos. Es decir, una observable  $A$  es una transformación lineal de  $\mathcal{H}$  en sí mismo que satisface la condición  $A = A^\dagger$  donde  $A^\dagger$  es el adjunto de  $A$  definido mediante la condición

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^\dagger u, v \rangle, \quad (2.1)$$

que debe cumplirse para todo  $u, v \in \mathcal{H}$ .

**Valores esperados** (*Regla de Born, 1926*). El valor esperado de una observable  $A$  en un estado  $u$  está dado por el número real  $\langle u, Au \rangle$ . Por ejemplo, el valor esperado de  $A$  en uno de sus vectores propios  $u$  es

$$\langle u, Au \rangle = \langle u, au \rangle = a, \quad (2.2)$$

aquí  $a$  es el valor propio de  $A$  asociado con  $u$ .

**Dinámica.** En la representación de Schrödinger la evolución de un sistema cuántico se especifica indicando cómo cambian los estados del sistema con el transcurso del tiempo. Este movimiento de los estados se realiza mediante una familia de transformaciones unitarias  $U_t$  de  $\mathcal{H}$  en sí mismo que, de acuerdo con el Teorema de Stone, está generada por un operador autoadjunto  $H$ , llamado *Hamiltoniano* del sistema. De manera que si  $u$  es el estado inicial del sistema entonces  $u_t = U_t u$  satisface la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} u_t = -iH u_t. \quad (2.3)$$

**Ejemplo:** Supóngase que podemos aislar una partícula y observar su movimiento sobre una línea recta. Es decir, tenemos un aparato que nos permite detectar las señales que ella emite. Supongamos también que el movimiento de esta partícula se realiza dentro de un campo que genera una energía potencial  $V$ .

Un modelo de mecánica cuántica para este sistema es el que consiste del espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ , el espacio de las funciones medibles en la recta cuyo módulo al cuadrado es una función integrable. Los estados del sistema son rayos en este espacio y las observables operadores autoadjuntos no necesariamente acotados. La observable que corresponde con la energía total de la partícula es el Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V, \quad (2.4)$$

donde  $V$  denota al operador de multiplicación inducido por la función  $V$ :  $(Vu)(x) = V(x)u(x)$ ,  $\hbar$  es la constante de Planck reducida y  $m$  es la masa de la partícula.

El movimiento de esta partícula está descrito por la correspondiente ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}u_t = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2}u_t + Vu_t, \quad (2.5)$$

con la condición inicial  $u_0 = u$ . Si la partícula se encuentra en un estado  $u_t$ , el valor esperado de la observable  $1_{[a,b]}$ , con  $a < b$ , es decir del operador de multiplicación inducido por la función indicadora del intervalo  $[a, b]$ , es

$$\langle u_t, 1_{[a,b]}u_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_t(x)1_{[a,b]}(x)u_t(x)dx = \int_a^b |u_t(x)|^2. \quad (2.6)$$

Este valor esperado se interpreta como *la probabilidad de que al medir la posición de la partícula se obtenga un valor en el intervalo  $[a, b]$* .

Las partículas, en mecánica cuántica, no siguen trayectorias definidas. No es posible conocer exactamente el valor de todas las magnitudes físicas que describen el estado de movimiento de la partícula en ningún momento, sino sólo una distribución estadística. Por lo tanto no es posible asignar una trayectoria a una partícula. Se puede decir que hay una determinada probabilidad de que la partícula se encuentre en una determinada región del espacio en un momento determinado.

Comunmente se considera que el carácter probabilístico de la mecánica cuántica invalida el determinismo científico. Sin embargo, existen varias Interpretaciones de la mecánica cuántica y no todas llegan a esta conclusión. Según puntualiza **Stephen Hawking**, la mecánica cuántica es determinista en sí misma, y es posible que la aparente indeterminación se deba a que realmente no existen posiciones y velocidades de partículas, sino sólo ondas. Los físicos cuánticos intentarían entonces ajustar las ondas a nuestras ideas preconcebidas de posiciones y velocidades. La inadecuación de estos conceptos sería la causa de la aparente impredecibilidad.

## 2.3. El Oscilador Armónico Cuántico.

Consideremos ahora el caso de una partícula moviéndose en una recta bajo la influencia de la energía potencial correspondiente a un oscilador armóni-

co clásico, es decir,  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ , donde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  es la frecuencia de oscilación.

La imagen física que conviene tener en mente no es la de un sistema masa-resorte, sino la idea de una caja negra que emite y absorbe energía, propuesta por Planck en 1900. Si queremos conocer la dinámica del sistema, debemos resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_t(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_t(x), \quad (2.7)$$

con la condición inicial  $\psi_{t=0}(x) = \psi(x)$ .

Resolvamos esta ecuación por el método de separación de variables, es decir, buscaremos soluciones de la forma  $\psi_t(x) = f(t)\phi(x)$ . Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene la identidad

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x)\right), \quad (2.8)$$

que se cumple si existen valores constantes  $E$  tales que

$$i\hbar\frac{df}{dt} = Ef, \quad (2.9)$$

de donde resulta  $f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ ; y

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x) = E\phi(x), \quad (2.10)$$

o equivalentemente  $H\phi = E\phi$ , que es un problema de valores propios para el *Hamiltoniano*  $H$ .

Por simplicidad de ahora en adelante supondremos que  $\hbar$ ,  $m$  y  $\omega$  son todas iguales a 1. Con esta convención tenemos que  $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$ . Definamos los operadores  $P = -i\frac{d}{dx}$  y  $Q$  el operador de multiplicación inducido por la función identidad  $I(x) = x$ , entonces  $P^2\phi = -i\frac{d}{dx}(-i\frac{d}{dx}\phi) = -\frac{d^2}{dx^2}\phi$  y  $(Q^2\phi)(x) = x^2\phi(x)$ , por lo tanto (en el sentido de Dirac)  $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$ ; pero  $P$  y  $Q$  son operadores que no conmutan, de hecho, si denotamos por  $[P, Q]$  al conmutador de  $P$  y  $Q$ , tenemos que

$$([P, Q]\phi)(x) = -i\frac{d}{dx}(x\phi(x)) - x(-i\frac{d}{dx}\phi(x)) = -i\phi(x), \quad (2.11)$$

es decir,  $[P, Q] = -iI$ . No obstante sigamos la idea de Dirac, si tal factorización fuera posible, desarrollando el producto tendríamos

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) + \frac{1}{2}, \quad (2.12)$$

que es una factorización de  $H - \frac{1}{2}I$  pero esto es suficiente para nuestro propósito.

Pongamos nombre a los factores de Dirac; sean  $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)$  y  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$ , entonces  $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$  y además  $[a, a^\dagger] = I$ ,  $[H, a] = -a$  y  $[H, a^\dagger] = a^\dagger$ .

Si existiera una función  $\phi_0$  tal que  $a\phi_0 = 0$ , entonces  $H\phi_0 = (a^\dagger a + \frac{1}{2}I)\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0$ . Es decir,  $\phi_0$  sería un vector propio de  $H$  con valor propio asociado igual a  $\frac{1}{2}$ . Un cálculo simple muestra que la ecuación  $a\phi_0 = 0$  es equivalente con  $\frac{d}{dx}\phi_0 = \phi_0$ , que es una ecuación lineal de primer orden con solución general de la forma  $\phi_0(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$ . Si además pedimos que  $\phi_0$  sea un estado, es decir,  $\|\phi_0\| = 1$ , entonces  $c = \pi^{-\frac{1}{4}}$  y  $\phi_0$  resulta ser la Gaussiana  $\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$  que en mecánica cuántica se llama estado fundamental o estado base del oscilador armónico cuántico.

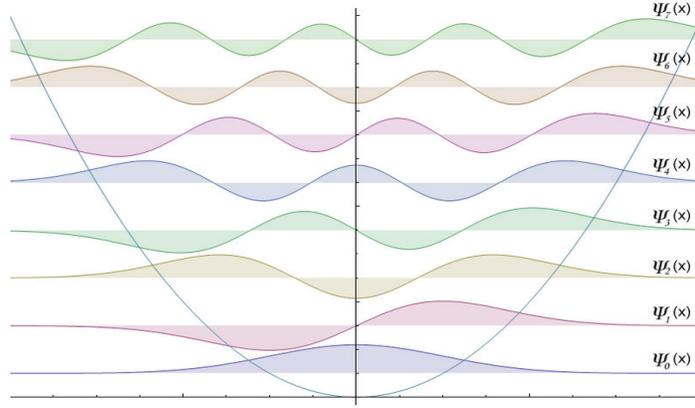
La razón de este nombre es la siguiente, como  $[H, a^\dagger] = a^\dagger$ , usando repetidamente esta relación resulta que

$$\begin{aligned} Ha^{\dagger n}\phi_0 &= a^{\dagger n}H\phi_0 + [H, a^{\dagger n}]\phi_0 = \frac{1}{2}a^{\dagger n}\phi_0 + [H, a^\dagger]a^{\dagger(n-1)}\phi_0 + a^\dagger[H, a^{\dagger(n-1)}]\phi_0 \\ &= \dots = (n + \frac{1}{2})a^{\dagger n}\phi_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es decir, las funciones  $(a^{\dagger n}\phi_0)_{n \geq 0}$  son vectores propios de  $H$  con valores propios  $(n + \frac{1}{2})_{n \geq 0}$ . Tomando en cuenta que los vectores propios de un operador autoadjunto son ortogonales y que  $\|a^{\dagger n}\phi_0\|^2 = n!$ , con un poco más de trabajo podemos concluir que se cumple lo siguiente.

**Teorema 2.3.1.** *El espectro de  $H$  es el subconjunto  $\{n + \frac{1}{2} : n \geq 0\}$  y las funciones  $\{\phi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}}a^{\dagger n}\phi_0 : n \geq 0\}$  forman una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

En la figura se muestran las gráficas de los primeros elementos de esta base ortonormal.



De acuerdo con el método de separación de variables, a partir de todo esto podemos concluir que la solución de la ecuación de Schrödinger se puede representar en la forma

$$\psi_t(x) = \sum_{n \geq 0} c_n e^{-(n+\frac{1}{2})t} \phi_n(x),$$

con  $\sum_{n \geq 0} c_n^2 < \infty$ .

Continuemos con nuestro análisis del oscilador armónico cuántico, con un cálculo simple se ve que  $a^\dagger \phi_n = (n + \frac{1}{2})\phi_{n+1}$ ,  $a\phi_n = n^{\frac{1}{2}}\phi_{n-1}$  y  $a^\dagger a\phi_n = n\phi_n$ . Nótese que  $a^\dagger a$  es un operador autoadjunto y su valor esperado en el estado  $\phi_n$  es

$$\langle \phi_n, a^\dagger a \phi_n \rangle = \langle \phi_n, n\phi_n \rangle = n.$$

Por esta razón  $\phi_n$  se llama el estado de  $n$  partículas. Las relaciones anteriores aceptan la siguiente interpretación: si el oscilador armónico cuántico se encuentra en el estado  $\phi_n$ , entonces:

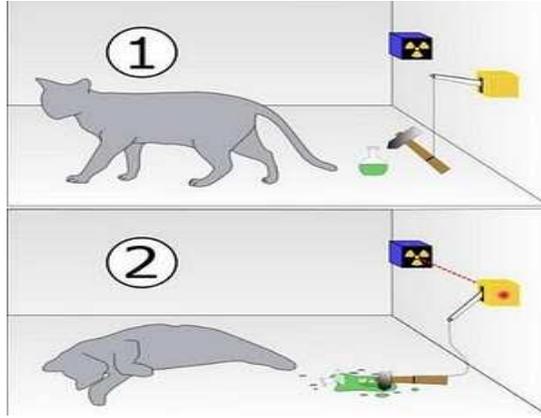
- (i) (*El operador de número*) El operador  $a^\dagger a$  indica el número de partículas  $p$  cuanto en ese estado.
- (ii) (*El operador de creación*) El operador  $a^\dagger$  añade (o crea) una partícula o cuanto al estado  $\phi_n$ , incrementando la energía del sistema en  $\hbar\omega$  unidades.
- (iii) (*El operador de aniquilación*) El operador  $a$  aniquila una partícula o cuanto del estado  $\phi_n$  disminuyendo la energía del sistema en  $\hbar\omega$  unidades.

Otra consecuencia importante de la relación  $[P, Q] = -iI$  que se llama *relación canónica de conmutación*, es el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Si se preparan varias copias idénticas de un sistema en un estado determinado, como puede ser un átomo, las medidas de la posición y de la cantidad de movimiento variarán de acuerdo con una cierta distribución de probabilidad característica del estado cuántico del sistema. Las medidas del objeto observable sufrirán la desviación estándar  $\Delta x$  de la posición y el momento  $\Delta p$ . Verifican entonces el principio de indeterminación o de incertidumbre que se expresa matemáticamente como:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

donde la  $h$  es la constante de Planck



**Proposición 2.3.2.** (Principio de incertidumbre de Heisenberg). Sean  $A$  y  $B$  dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tales que  $[A, B] = iC$ , donde  $C$  es un operador autoadjunto que conmuta con  $A$  y  $B$ . Sea  $u \in \mathcal{H}$  un vector unitario y defínase  $\langle A^k \rangle = \langle u, A^k u \rangle$  y  $Var(A) = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ . Entonces

$$\sqrt{Var(A)}\sqrt{Var(B)} \geq \langle C \rangle.$$

*Demostración.* Nótese que con  $a = \langle A \rangle$  y  $b = \langle B \rangle$  se tiene

$$\langle (A - aI)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - 2a\langle A \rangle + a^2 = \langle A^2 \rangle - a^2 = Var(A)$$

y

$$[A - aI, B - bI] = iC.$$

## 22 CAPÍTULO 2. EDO IMPORTANTES EN LA FÍSICA-MATEMÁTICA

Entonces reemplazando  $A$  y  $B$  por  $A - aI$  y  $B - bI$  respectivamente, si es necesario, podemos suponer que  $a = b = 0$ . Ahora

$$AB = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}[A, B] = \frac{1}{2}(AB + BA) + iC,$$

por lo tanto

$$\langle Au, Bu \rangle = \langle u, ABu \rangle = \Re \langle Au, Bu \rangle + i\Im \langle Au, Bu \rangle = \frac{1}{2} \langle u, (AB + BA)u \rangle + \frac{i}{2} \langle C \rangle.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (|\langle u, (AB + BA)u \rangle|^2 + \langle C \rangle^2) &= |\langle Au, Bu \rangle|^2 \leq \|Au\|^2 \|Bu\|^2 \\ &= \langle u, A^2u \rangle \langle u, B^2u \rangle = \text{Var}(A)\text{Var}(B). \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\text{Var}(A)\text{Var}(B) \geq \langle C \rangle^2.$$

□

El principio de incertidumbre simplemente establece una limitación sobre nuestra capacidad de medida que nos impide conocer con precisión la posición inicial  $x(0)$  y el momento lineal inicial  $p(0)$  de un sistema físico simultáneamente.

# Capítulo 3

## Factorizaciones y Supersimetrías

**Objetivos de Estudio del Capítulo:** Supersimetrías en el oscilador armónico cuántico generalizado en  $\mathbb{R}$ , las ecuaciones de Bernoulli y Ricatti en el cálculo de Hamiltonianos acompañantes supersimétricos.

### 3.1. El Oscilador Armónico Generalizado en $\mathbb{R}$ .

Existen muchos potenciales  $V(x)$  para los cuales los niveles de energía (valores propios) están dados por  $E_n = (n + \frac{1}{2})\omega$ ; estos se conocen como potenciales generalizados del oscilador armónico cuántico. En esta sección usaremos el método de factorización unilateral [8] para construir estos potenciales cuánticos generalizados y en tal construcción será necesario resolver una ecuación diferencial de Ricatti siendo esto último una aplicación más a la física-matemática de las ecuaciones diferenciales no lineales; la utilidad de estas factorizaciones fue observada por primera vez por Schrödinger en [1]. De la ecuación (6) tenemos, con  $H$  el Hamiltoniano de (5)

$$aa^\dagger = H + \frac{1}{2}I \tag{3.1}$$

$$a^\dagger a = H - \frac{1}{2}I. \tag{3.2}$$

Ahora consideremos *a priori* un operador  $b$  que junto con su adjunto nos daran la factorización unilateral del Hamiltoniano  $H$ :

$$bb^\dagger = H + \frac{1}{2}I, \quad (3.3)$$

donde por analogía con la ecuación (3) el operador  $b$  tendrá la forma

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{d}{dx} + f(x) \right] \quad (3.4)$$

donde  $f$  es una función real de variable real en  $C^1(\mathbb{R})$ . Entonces

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{d}{dx} + f(x) \right] \quad (3.5)$$

De la primera relación de conmutación en (9), tenemos que  $f$  debe satisfacer la ecuación diferencial no lineal de Ricatti

$$\frac{df}{dx} + f^2 = x^2 + 1. \quad (3.6)$$

Una solución trivial de (16) es  $f(x) = x$  y esto reduce al caso  $b = a$ , existen otras soluciones de (16). De la teora estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias; la ecuación (16) se reduce a una ecuación diferencial de Bernoulli [10] con el cambio de variable

$$f(x) = x + g(x),$$

donde  $g$  es una función de la misma clase que  $f$ ; en efecto,

$$\frac{df}{dx} + f^2 = 1 + g'(x) + (x + g(x))^2 = x^2 + 1$$

de donde

$$g'(x) + 2xg(x) + g^2(x) = 0;$$

esta última ecuación diferencial tipo Bernoulli, se reduce mediante el cambio  $g(x) = \frac{1}{G(x)}$ , siendo  $g(x) \neq 0$  a la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dG}{dx} - 2xG - 1 = 0 \quad (3.7)$$

cuya solución general es

$$G(x) = \left( \beta + \int_0^x e^{-u^2} du \right) e^{x^2}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

luego

$$g(x) = \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

y finalmente

$$f(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

así para  $\beta \in \mathbb{R}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + x + \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du} \right) \quad (3.9)$$

y por lo tanto

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + x + \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du} \right) \quad (3.10)$$

de donde calculando

$$b^\dagger b = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du} \right) \quad (3.11)$$

luego

$$b^\dagger b = \hat{H} - \frac{1}{2} I \quad (3.12)$$

donde

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \hat{V}(x), \quad (3.13)$$

con

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-x^2}}{\beta + \int_0^x e^{-u^2} du} \right) \quad (3.14)$$

el operador  $b^\dagger b$  produce nuevos Hamiltonianos con excepción del caso  $\beta = \infty$ . De la ecuación (22) obtenemos

$$\hat{H} b^\dagger = \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} I \right) b^\dagger = b^\dagger \left( b b^\dagger + \frac{1}{2} I \right) = b^\dagger \left( H + \frac{1}{2} I \right),$$

por lo tanto, si como en la ecuación (10) denotamos por  $\psi_n$  al estado  $n$ -ésimo del oscilador armónico cuyo Hamiltoniano es  $H$  y  $\phi_n$  al estado  $n$ -ésimo del nuevo sistema cuyo Hamiltoniano es  $\hat{H}$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(x) = c_n \psi_{n-1}(x); \quad c_n \text{ es una constante,} \quad (3.15)$$

o bien,

$$\hat{H}\phi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \phi_n \quad (3.16)$$

para cada par  $m, n \in \mathbb{N}$  calculando

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \bar{c}_m c_n \langle \psi_{m-1}, b b^\dagger \psi_{n-1} \rangle = \bar{c}_m c_n n \delta_{m,n}; \quad (3.17)$$

y por lo tanto  $\phi_n$  es un vector normalizado si  $c_n = n^{-\frac{1}{2}}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora si existe un vector (estado)  $\phi_0$  tal que  $b\phi_0 = 0$ , entonces  $\langle \phi_n, \phi_0 \rangle = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces de la ecuación (22)

$$\hat{H}\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0, \quad (3.18)$$

y así  $\phi_0$  es el estado base de  $\hat{H}$ . Para determinar los valores de  $\beta$  para los cuales los estados  $\phi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  existan, consideremos la desigualdad

$$\left| \int_0^x e^{-u^2} du \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (3.19)$$

obtenemos que

$$|\beta| > \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto los Hamiltonianos dados por (23) forman una familia 1-paramétrica de Hamiltonianos si  $\beta$  satisface la desigualdad (30). En la próxima sección veremos que  $H + \frac{1}{2}I$  y  $\hat{H} - \frac{1}{2}I$  son compañeros supersimétricos.

## 3.2. Supersimetría del Oscilador Armónico.

En [2] Witten define el álgebra de un sistema cuántico supersimétrico, la cual se deriva del álgebra de supersimetría de la teoría de campos. En sistemas cuánticos supersimétricos, existen los operadores de carga  $Q_i$ , los cuales conmutan con el Hamiltoniano (supersimétrico) del sistema  $H_{susy}$ , es decir,

$$[Q_i, H_{susy}] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.21)$$

y cumplen con las relaciones algebraicas

$$[Q_i, Q_j] = \delta_{ij} H_{susy}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.22)$$

Para el caso  $N = 2$ , podemos definir

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2), \quad Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2) \quad (3.23)$$

y estos nuevos operadores obedecen las relaciones algebraicas

$$H_{susy} = \{Q, Q^\dagger\}, \quad Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 \quad (3.24)$$

consecuentemente,

$$[Q, H_{susy}] = [Q^\dagger, H_{susy}] = 0. \quad (3.25)$$

Podemos representar a nuestros operadores de carga como las matrices  $2 \times 2$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $A$  es un operador lineal y  $A^\dagger$  es su adjunto. Ahora el Hamiltoniano supersimétrico tiene la representación

$$H_{susy} = \{Q, Q^\dagger\} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}$$

donde hemos denotado a los operadores hermitianos  $A^\dagger A$  y  $AA^\dagger$  como los Hamiltonianos  $H_-$  y  $H_+$  respectivamente y estos resultan semidefinidos positivos. Es sencillo probar que si  $\psi^-$  es un vector propio (eigenestado) de  $H_-$  con valor propio positivo  $E^-$ , entonces

$$H_- \psi^- = A^\dagger A \psi^- = E^- \psi^-$$

entonces  $\psi^+ = (E^-)^{-\frac{1}{2}} A \psi^-$  es un vector propio normalizado de  $H_+$  con valor propio  $E^+ = E^-$

$$H_+ \psi^+ = (E^-)^{-\frac{1}{2}} AA^\dagger A \psi^- = E^- \psi^+,$$

de la misma manera podemos ver que  $A^+$  transforma un vector propio de  $H_+$  en uno de  $H_-$  con los mismos valores propios o niveles de energía. Esto puede escribirse como

$$Q \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\psi^- \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger\psi^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este resultado es natural teniendo en cuenta que construimos los operadores de carga (31) para cumplir con el álgebra (34). En nuestro caso de (14) y (15) tenemos que

$$A = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{d}{dx} + f(x) \right], \quad A^\dagger = b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{d}{dx} + f(x) \right],$$

donde  $f(x)$  como función de  $x$  es llamado superpotencial, y de (21) y (22),

$$b^\dagger b = H_-, \quad bb^\dagger = H_+;$$

resultan ser compañeros supersimétricos.

### Conclusión

la mecánica cuántica supersimétrica implica la existencia parejas de Hamiltonianos que comparten una relación matemática particular, a dichos Hamiltonianos se llaman Hamiltonianos compañeros. Por cada estado propio de un Hamiltoniano, su acompañante tiene un estado propio que corresponde con la misma energía (con la posible excepción del estado base). Este hecho puede ser explotado para deducir muchas propiedades del espectro; esto resulta análogo a la descripción original de la mecánica cuántica supersimétrica, la cual se refería a los bosones y fermiones. Podemos imaginar un “Hamiltoniano bosónico” cuyos estados propios son los estados de los bosones de la teoría cuántica estándar, el compañero de este Hamiltoniano supersimétrico sería “fermiónico”, y sus estados propios serían fermiones de la teoría cuántica estándar. Cada bosón podría tener un socio o compañero fermión de igual energía, pero, en el mundo relativista, la energía y la masa son intercambiables, así que podemos decir con la misma facilidad que las partículas tienen masa socias o compañeras iguales.

Como hemos visto en el presente trabajo, de las aplicaciones de la ecuaciones diferenciales a la mecánica cuántica; resolver una cierta ecuación no lineal (tipo Ricatti) nos da como resultado obtener Hamiltonianos supersimétricos para un sistema cuántico.

# Capítulo 4

## Aplicación: Factorización Supersimétrica y la Degeneración Accidental del Átomo de Hidrógeno

**Objetivos de Estudio del Capítulo:** Aquí se usa la factorización supersimétrica de la parte radial de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, lo cual proporciona operadores de creación y aniquilación (o también de ascenso y descenso) útiles para obtener las funciones propias y relaciones entre ellas para la parte radial, así como caracterizar su degeneración accidental, como una propiedad característica de un Hamiltoniano supersimétrico. Por otra parte, la degeneración accidental en el átomo de hidrógeno [6], es debida a la existencia del vector constante de movimiento de Runge-Lenz, cuyas componentes junto con las del momento angular, forman un álgebra de Lie de  $SO(4)$ .

### 4.1. El Método de Factorización de Infeld

Se considera la ecuación de Schrödinger para un potencial  $V(x, l)$ , donde  $l \in \mathbb{Z}$  es un número cuántico

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 Y(x, l)}{dx^2} + V(x, l)Y(x, l) = EY(x, l). \quad (4.1)$$

Para la forma estándar de la ecuación anterior consideremos  $r(x, l) = -\frac{2mV(x, l)}{\hbar}$  y  $\lambda = \frac{2mE}{\hbar}$ :

$$\frac{d^2 Y(x, l)}{dx^2} + r(x, l)Y(x, l) + \lambda Y(x, l) = 0. \quad (4.2)$$

De acuerdo a Infeld y Hull [7], la ecuación (4.2) se puede factorizar, si es posible hallar dos funciones  $f(x, l)$  y  $L(l)$  que definen a los operadores  $A_l$  y  $A_l^\dagger$

$$A_l = f(x, l) - \frac{d}{dx} \quad (4.3)$$

$$A_l^\dagger = f(x, l) + \frac{d}{dx}, \quad (4.4)$$

tales que cada una de las siguientes ecuaciones sea equivalente a la ecuación (4.2)

$$A_{l+1}^\dagger A_{l+1} Y(x, l) = (\lambda - L(l+1))Y(x, l) \quad (4.5)$$

$$A_l A_l^\dagger Y(x, l) = (\lambda - L(l))Y(x, l) \quad (4.6)$$

La idea fundamental es que los operadores  $A_l$  y  $A_l^\dagger$  se usaran como operadores de ascenso y descenso respectivamente y se pueden obtener relaciones de recurrencia para las soluciones  $Y(x, l)$  de la ecuación (4.2) o entre las soluciones de las equivalentes (4.5), (4.6) para el mismo valor de  $\lambda$ .

Si  $Y(x, l)$  es solución de la ecuación (4.5), entonces  $Y(x, l+1) = A_l Y(x, l)$  es solución de (4.6) con la misma energía para el entero  $l+1$  y similarmente, si  $Y(x, l)$  es solución de la ecuación (4.6) entonces  $Y(x, l-1) = A_l^\dagger Y(x, l)$  es solución de (4.5) con la misma energía para el entero  $l-1$ .

La equivalencia de (4.5), (4.6) y (4.2) nos permite, sustituyendo los operadores de ascenso y descenso obtener:

$$-r(x, l) = f^2(x, l) - f'(x, l) + L(l) \quad (4.7)$$

$$-r(x, l) = f^2(x, l+1) + f'(x, l+1) + L(l+1) \quad (4.8)$$

de donde, si el potencial  $r(x, l)$  es conocido se obtiene:

$$f(x, l) = \frac{1}{2} \frac{r'(x, l-1) + r'(x, l)}{r(x, l-1) - r(x, l)} \quad (4.9)$$

$$L(l) = -\frac{1}{2}(r(x, l-1) + r(x, l)) - f^2(x, l). \quad (4.10)$$

No para cualquier potencial  $r(x, l)$  la factorización es posible. Infeld y Hull [7] establecen que hay seis tipos de potenciales para los cuales el método de factorización es aplicable y cuando la dependencia de  $f(x, l)$  esté restringida a tomar valores de potencias finitas de  $l$ .

Siguiendo el método [7], si la función  $L(l)$  es creciente, entonces una condición para que existan soluciones en  $L^2(\mathbb{R})$  es que

$$\lambda = \lambda_n = L(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Las ecuaciones (4.7) y (4.8) relacionan los potenciales  $r(x, l)$  y  $r(x, l+1)$ , asociados a una sucesión de ecuaciones de Schrödinger para los parámetros  $l$  y  $l+1$ . Se dice entonces, que tales potenciales son asociados o acompañantes, y a las ecuaciones de Schrödinger o Hamiltonianos de la sucesión determinada por ellos, se les llama también asociados o compañeros.

De las ecuaciones (4.5) y (4.6) las dos ecuaciones de Schrödinger asociadas a los potenciales  $r(x, l+1)$  y  $r(x, l)$  con la misma energía  $\lambda_n$ ,

$$\frac{d^2 Y(x, l+1)}{dx^2} + r(x, l+1)Y(x, l+1) + \lambda Y(x, l+1) = 0. \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 Y(x, l)}{dx^2} + r(x, l)Y(x, l) + \lambda Y(x, l) = 0, \quad (4.12)$$

cuyas soluciones están relacionadas por los operadores de ascenso y descenso. La factorización de Infeld-Hull puede escribirse en el lenguaje de la mecánica cuántica supersimétrica de Witten [2], definiendo las cargas  $Q_l$  y  $Q_l^\dagger$

$$Q_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_l & 0 \end{pmatrix} \quad Q_l^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A_l^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales determinan el Hamiltoniano supersimétrico  $H_{susy}$  por el anticonmutador

$$H_{susy} = \{Q_l^\dagger, Q_l\} = \begin{pmatrix} A_l^\dagger A_l & 0 \\ 0 & A_l A_l^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}$$

En esta ecuación los Hamiltonianos compañeros  $H_+$  y  $H_-$  corresponden a las ecuaciones equivalentes (4.5), (4.6) o (4.11), (4.12), con los índices correspondientes para el parámetro  $l$ . Las cargas  $Q_l, Q_l^\dagger$  satisfacen, también, las relaciones de una cierta álgebra supersimétrica

$$Q_l^2 = Q_l^{\dagger 2} = 0 = [Q_l^\dagger Q_l, Q_l Q_l^\dagger] \quad (4.13)$$

$$[H_{susy}, Q_l] = [H_{susy}, Q_l^\dagger] = 0. \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) nos dice que los Hamiltonianos  $H_+, H_-$  tendrán el mismo espectro salvo el estado base, y para el número cuántico principal  $n$  las funciones  $Y(x, l)$  estarán degeneradas respecto al número cuántico  $l$ .

## 4.2. El Átomo de Hidrógeno

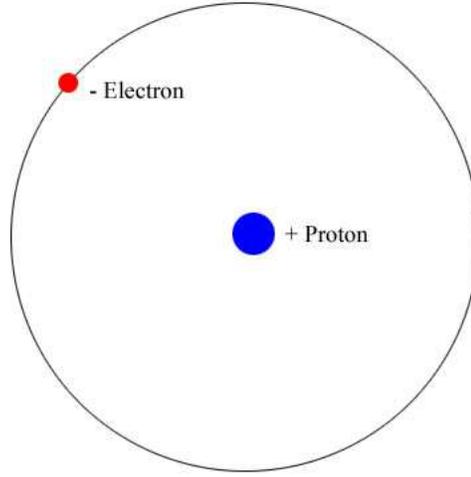
La forma radial de la ecuación de Schrödinger para el potencial de Coulomb  $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ , en el que  $e$  es la carga del electrón y  $r$  es la distancia del electrón al núcleo,

$$\left[ -\frac{\hbar}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{2mr^2} \hbar^2 + V(r) - E \right] R(r, l) = 0, \quad (4.15)$$

la cual se puede escribir como:

$$\left[ \frac{d}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \left( \frac{n}{x} - \frac{1}{4} \right) \right] Y(x, l) = 0. \quad (4.16)$$

mediante los cambios de variables  $Y(r, l) = rR(r, l)$ ,  $x = \frac{2r}{na}$ ,  $\lambda = -\frac{m^2 e^4}{n^2 \hbar^2}$ , donde  $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$  es el radio de Borh y el espectro de energía  $E = -\frac{e^2}{2an^2}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .



La ecuación (4.16) se puede factorizar, mediante los operadores

$$A_l = \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{2l} - \frac{d}{dx} \right), \quad A_l^\dagger = \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{2l} + \frac{d}{dx} \right); \quad (4.17)$$

y estos a la vez determinan dos Hamiltonianos acompañantes:

$$H_- Y(x, l) = A_l A_l^\dagger Y(x, l) = \frac{1}{4} \left( \frac{n^2}{l^2} - 1 \right) Y(x, l), \quad (4.18)$$

$$H_+ Y(x, l-1) = A_l^\dagger A_l Y(x, l-1) = \frac{1}{4} \left( \frac{n^2}{l^2} - 1 \right) Y(x, l-1); \quad (4.19)$$

aquí  $\lambda = -\frac{1}{4}$  y  $L(l) = -\frac{n^2}{4l^2}$  son parámetros.

En este caso los operadores de ascenso y descenso en las funciones de onda actúan por

$$A_l Y_n(x, l-1) = \frac{1}{2l} \sqrt{(n-l)(n+l)} Y_n(x, l) \quad (4.20)$$

$$A_l^\dagger Y_n(x, l-1) = \frac{1}{2l} \sqrt{(n-l)(n+1)} Y_n(x, l-1). \quad (4.21)$$

Tenemos que, para el estado base normalizado

$$Y_n(x, n-1) = \sqrt{\frac{2}{an(2n)!}} x^n e^{-\frac{x}{2}},$$

se tiene

$$A_l Y_n(x, n-1) = \left( \frac{1}{x} - \frac{n}{2l} - \frac{d}{dx} \right) Y_n(x, n-1) = 0.$$

Luego aplicando reiteradamente el operador de ascenso, podemos llegar a que la función de onda es:

$$Y_n(x, l) = (-1)^{n-l-1} \left[ \frac{(n-l-1)!}{an^2[(n+l)!]^3} \right]^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}x} x^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1}(x), \quad (4.22)$$

en la que

$$L_{n-l-1}^{2l+1}(x) = x^{-(l+1)} (-1)^{n-l-1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} \prod_{k=l+1}^{n-1} \left[ 1 - \frac{2k}{n+k} \left( \frac{d}{dx} + \frac{k}{x} \right) \right] x^n,$$

aquí  $n-k=l$ , la expresión anterior es un polinomio de grado  $n-l-1$  en  $x$  y está relacionada con los polinomios asociados de Laguerre.

Los números cuánticos no son independientes unos de otros por lo que el número de combinaciones posibles está limitado. Las restricciones son las siguientes:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$m = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l.$$

En el caso de los átomos hidrogenoides al no haber interacciones entre electrones, pues solo hay uno, la energía de los orbitales atómicos puede ser calculada analíticamente de forma exacta. Los valores de energía permitidos son

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z^2}{n^2} E_h,$$

donde  $Z$  es el número atómico y  $E_h$  es la unidad atómica de energía o de Hartree<sup>1</sup>

Como se puede ver, la fórmula sólo depende del número cuántico principal. Esto confiere a los diferentes estados de energía y es lo que se denomina

---

<sup>1</sup>físico Douglas Hartree

**degeneración accidental.** Por ejemplo, para  $n = 2$  existen cuatro estados posibles,  $200$ ,  $210$ ,  $21 + 1$  y  $21 - 1$ , con la misma energía para  $l = 0$  que para  $l = 1$ . Pero dado que la función de energía sólo depende de  $n$  y no de  $l$ , todos ellos tendrán, en principio, la misma energía (la degeneración en  $m$  es consecuencia de la invariancia bajo rotaciones de todos los potenciales centrales). Esta aproximación en la medida de los niveles de energía recibe el nombre de estructura gruesa. Sin embargo, el hecho de que la degeneración sea accidental es debido a que no aparece para otros potenciales centrales, sino justo para un potencial que decaiga exactamente como el de Coulomb, o sea, exactamente con el inverso de la distancia. Clásicamente esta dependencia con la distancia en la energía potencial hace que se pueda construir una cantidad vectorial (el vector de Runge-Lenz) que permanece constante en el movimiento. Cuánticamente, las componentes del operador vectorial que representan al observable vector de Runge-Lenz no conmutan con el momento angular orbital al cuadrado, lo cual garantiza que tengamos estados linealmente independientes con el mismo autovalor de la energía y diferente autovalor del momento angular orbital al cuadrado: o sea, lo que hemos llamado degeneración accidental. En realidad, existen tres correcciones distintas que hacen variar sensiblemente el valor de la energía de dichos niveles rompiendo esa degeneración y es la denominada estructura fina del átomo de hidrógeno o hidrogenoide. En los átomos multielectrónicos en la aproximación de campo central, el potencial *apantallado* que sienten los electrones y que tiene en cuenta en parte la repulsión interelectrónica ya no es tipo Coulomb (no decae con el inverso de la distancia al núcleo) y no hay degeneración accidental.

Como es conocido en mecánica cuántica, la degeneración accidental del espectro de energía es debida [6] a la existencia del vector de Runge-Lenz,

$$\vec{A} = \frac{n\hbar}{2me^2} [\vec{L} \times \vec{P} - \vec{p} \times \vec{L}] + n \frac{\vec{r}}{r}.$$

Las componentes de este vector, junto con las del momento angular  $\vec{L}$  satisfacen el álgebra de Lie del grupo  $SO(4)$ . Además se puede probar que los operadores de ascenso y descenso  $A_l^\dagger$  y  $A_l$  provocan la degeneración accidental en los niveles de energía en el átomo de hidrógeno [6].



# Bibliografía

- [1] E. Schrödinger, *Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization*, Proceedings of the Royal Irish Academy , **46**, 183-206, (1941).
- [2] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymmetry*, Nuclear Physics B, **188(3)**, 513 - 554, (1981).
- [3] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, Word Scientific Singapore (2001).
- [4] González-Gaxiola. O. Dos Álgebras de Operadores Relacionadas con la Dinámica del Oscilador Armónico Cuántico. Tesis de Posgrado en Matemáticas; UAM-Iztapalapa, México D.F. (2000).
- [5] J. Stochel and F. H. Szafraniec, *A Peculiarity of the Creation Operator*, Gragrow Math. J. **44**, 137-147. (2000).
- [6] L. C. Biendeharn, J. D. Louck *Angular Momentum in Quantum Physics*, Addisson Wesley (1980).
- [7] L. Infeld, T. S. Hull, *Rev. Modern Physics* 23, (1951).
- [8] O. L. De Lange, R. E. Raab, *Operator Methods in Quantum Mechanics*, Clarendon Press Oxford (1991).
- [9] P. M. Dirac; Proceedings of the Royal Society , **A117**, 610, (1927).
- [10] R. K. Nagle, E. B. Saff, *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*, Addison-Wesley Delaware (1992).
- [11] R. P. Feynman, Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, *Rev. Modern Physics* 20, (1948), 367-387.